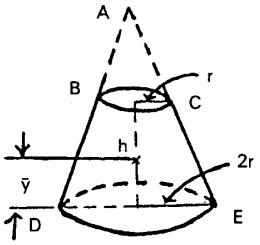
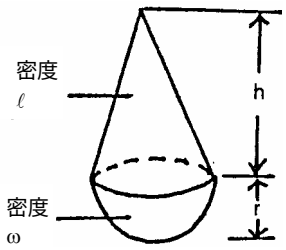
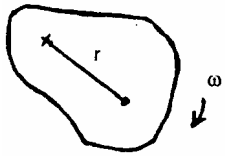
单元 11： 刚体运动

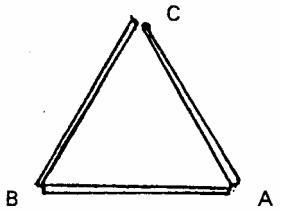
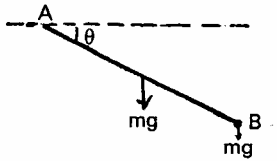
特定目标：

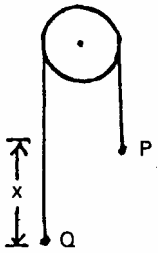
1. 找出一刚体的质量中心与及惯性矩。
2. 理解及运用角动量守恒定律。
3. 解有关刚体的动力学问题。

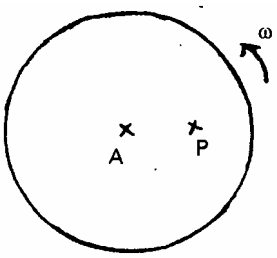
内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
11.1 质量中心 *(a)* 简介	6	由于学生并不太认识「刚体」这个名称，故此教师可由有限数量的质点开始，从而介绍质量中心的定义。 教师并可引用简单的例子帮助学生了解以下公式： $\vec{r_c} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i}$ 其中 $\vec{r_c}$ 代表质量中心的位置向量。 *例* 将四个质量分别为 m_1、m_2、m_3 及 m_4 的物体放置在一边长为 a 的正方形的顶点 A、B、C 及 D 上。求质量中心的位置。 在此例中，学生应可计算以 A 为原点的质点系的质量中心的位置向量。利用 C 为原点，教师可提醒学生质点系的质量中心的位置向量是与所选取的基准点无关。
(b) 以积分法求质量中心		当物体不能分割为有限数量的质点时，它可分为大量的细小部分，而这些部分称为元素。由此，质点中心的位置可由积分求得： $\bar{x} = \frac{\int x\ dm}{\int dm}$ and $\bar{y} = \frac{\int y\ dm}{\int dm}$ 教师应讨论一些如均匀棒、三角薄片、实心及空心半球体、圆弧等的例子。 教师可引出不同的例子，以阐释找出不常见物体的质量中心的技巧。例如，教师可要求学生找出一个由 x 轴、x = 2 及抛物线 $y^2 = 4x$ 所围成的区域绕着 x 轴旋转而形成的均匀立体的质量中心。

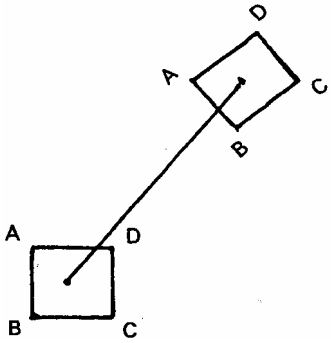
内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
(c) 复合物体的质量中心		学生应知道对于一些涉及旋转体的刚体，如实心圆锥体等，碟形是重要的元素；相同地，对于有关一些涉及旋转曲面的刚体，如空心半球体等，环形是重要的元素。 教师可利用复合物体不同部分的相对质量来找出该复合物体的质量中心。 *例一* 求一实心平截头体的质量中心。  学生可先求出两个假定圆锥体 ABC 和 ADE，及平截头体 BCED 的相对质量，从而计算那平截头体的质量中心。结果是 $8\left(\frac{2h}{4}\right) = 7\bar{y} + (1)\left(h + \frac{h}{4}\right)$ *例二* 求出一个由直立圆锥体及半球体组成的立体的质量中心。.  在此例中，若该物体在其半球体曲面上任何部分与一平滑水平面接触均能达致平衡，教师可引导学生找出相对的 $\frac{h}{r}$ 值。

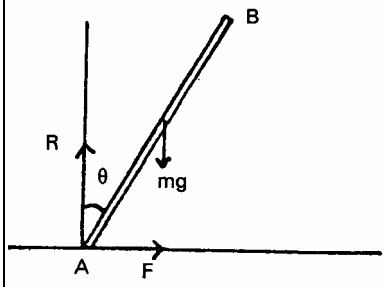
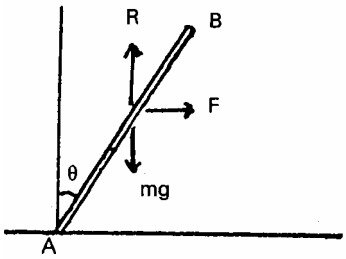
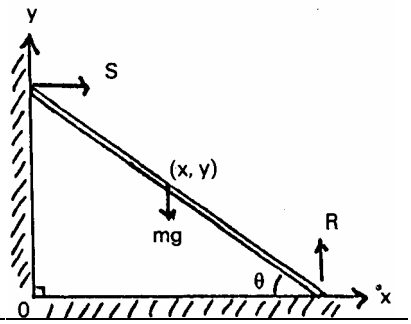
内容	时间分配	教学建议
11.2 惯性矩 *(a)* 简介	6	教师可先向学生说明一个刚体的运动是有别于一个质点的运动，而一般运动可包含平移及旋转。 透过考虑绕一固定轴的刚体旋转运动，学生不难找出该刚体之动能数式。  动能 = $\frac{1}{2}\omega^2\left(\sum mr^2\right)$ 教师然后可介绍「惯性矩，$I=\sum mr^2$」，并提醒学生 I 是非常重要的，且常会出现于涉及刚体旋转的题目中。
(b) 以积分法求惯性矩		教师应引导学生求出一些有限数量质点的惯性矩从而将这概念伸展至求刚体对一已知轴的惯性矩。积分法的技巧可应用于后者。 学生应理解物体的惯性矩与以下两点有直接关系： (a) 旋转轴的位置； (b) 围绕轴的质量分布。 教师可与学生讨论一些例子，如均匀棒、长方形薄片、环形、碟形及球体等。
(c) 平行及垂直轴定理		在此阶段，学生应已熟识利用基本原理找出刚体惯性矩的技巧，按着，教师可介绍平行轴定理及垂直轴定理。若学生已知一刚体绕某些标准轴的惯性矩，则此二定理可助他们找出刚体绕其它轴的惯性矩。由此，学生可省略大量应用积分法的计算。教师应指导学生怎样利用此二定理去找出惯性矩。 教师亦可与学生讨论一些例子，如一碟形绕切线的惯性矩，及一实心圆锥体绕一通过顶点且垂直对称轴的轴的惯性矩等。 教师可提醒学生以下两点： (a) 垂直轴定理只可运用在薄片形的刚体； (b) 在平行轴定理中，一均匀物体绕一穿过质量中心的轴的惯性矩是比穿过任何一条平行轴的惯性矩少 Md^2，其中 M 是该物体的质量，而 d 是平行轴间的距离。

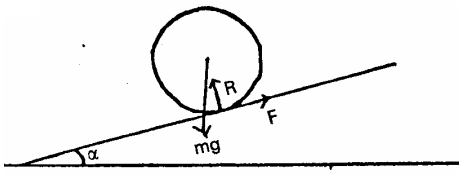
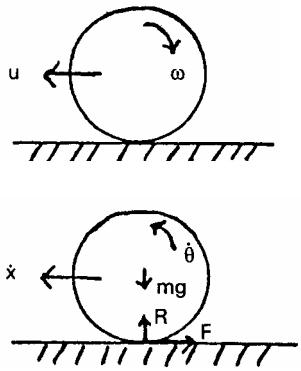
内容	时间分配	教学建议
(d) 复合物体的惯性矩		学生应知道将一个复合物体各部分的惯性矩加起来，便可求得该物体的惯性矩。教师可与学生讨论一些例子，如求物体 (见下图) 绕一穿过 A 和垂直 ABC 平面的轴的惯性矩。 
11.3 绕固定轴的刚体运动 *(a)* 能量守恒		对于一个普通学生来说，「刚体的一般运动」是一个较困难的题目，故此，教师可先讨论绕固定轴的刚体运动。 学生应懂得运用能量守恒定理，以解答有关刚体绕固定轴旋转的问题。 *例* 一质量为 m、长 2a 之均匀棒 AB，可任意绕一穿过 A 点的水平轴旋转。另一质量为 m 的质点则附在棒上 B 点的位置。当 AB 处于水平状态时，棒由静止中放行。  教师应令学生注意棒 AB 是不可以视为质量点处理的。 教师可根据能量守恒定理，引导学生找出角速度 $\dot{\theta}$ 及角加速度 $\ddot{\theta}$。

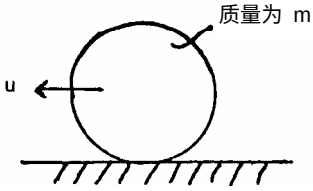
内容	时间分配	教学建议
(b) 角动量定理		教师可与学生讨论绕固定翰的角动量之定义。学生应认识角动量定理 $I\frac{d\omega}{dt}=I\ddot{\theta}=L$ ，其中 L 是那些施于物体上的作用力对该固定轴的力矩。 以上的方程是可与牛顿第二定理 $m\frac{dv}{dt}=F$ 相比较。 以下是一些可与学生讨论的例子： *例一* 一飞轮绕轴的惯性矩为 10 kgm^2。当该轮以角速度 ω_0 旋转时，一 20 Nm 的恒转矩加于其上，为时三秒。 从 $I\ddot{\theta}=L$，学生应不难求得 $\ddot{\theta}=2$。教师现可引导学生找出下列方程： $\dot{\theta}=\omega_0+2t$ ， $\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}(2)t^2$ 此方程可与另一些得自恒线性加速度的方程作比较： $v=u+at$ ， $s=ut+\frac{1}{2}at^2$ *例二* 一半径为 a ，质量为 M 的滑轮，可随意绕一水平轴旋转。一幼线挂在滑轮上，而线的两端分别挂着两个质点，质点 P 重 m 而质点 Q 则重 2m。此线不会在滑轮上滑动。此组合从静止状态开始，然后质点 Q 在 t 时间内滑下的距离为 x。  在此例中，教师可与学生讨论为何 x = aθ 及 $\ddot{x}=a\ddot{\theta}$，并着学生注意滑轮两边幼线的张力是不相同的。

内容	时间分配	教学建议
		教师可引导学生写出 P、Q 及滑轮的运动方程。此外，教师亦可与学生讨论有关在此例中引用能量守恒的可能性。 教师应介绍角动量守恒定律，并以简单的例子说明。 *例* 一均匀的碟状物体，质量为 m，半径为 a，它正绕着一通过中心点 A 的垂直轴以恒角速度 ω 旋转。在距离 A 点 a/2 处，轻轻放下质量为 2m 的质点 P，而 P 在碟上没有任何的滑动。  教师可向学生解释，说明由于没有外来转矩，角动量必定要守恒。 教师并可引导学生找出新的角速度 (与质点的角速度相同)。
(c) 应用		教师亦可引用其它例子，如由力偶所产生的功能 $\int L\,d\theta$，转矩的衡量 $\int L\,dt$，圆锥摆等。
11.4 刚体的一般运动 *(a)* 简介	16	教师可以图解方式，教授刚体的一般运动。

内容	时间分配	教学建议
(b) 运动方程		 学生应知道一般运动，是包括两部分的： (1) 质量中心的平移， (2) 绕质量中心的旋转。 教师可推导有关的方程，但重点应放在应用方面。 学生须了解刚体的一般运动，可分别从以下两点作分析： (a) 质量中心的线性运动， (b) 绕穿过质量中心为轴的旋转运动。 教师可与学生讨论角动量定理。该定理可综合如下： 物体绕穿过质量中心为轴的角动量变率等于所有外作用力对同一轴的矩的和。 教师可举例说明解有关刚体一般运动的问题的技巧。 *例一* 一均匀棒 AB，长 2a' 质量 m' 垂直地放在一粗糙的水平面上 (棒因而没有滑动)，然后释放。 学生须了解任何在力作用下的刚体质量中心的运动，是相等于所有质量皆集中于质量中心，而所有力都施于此点上。

内容	时间分配	教学建议
		由于质量中心是进行圆周运动，教师司引导学生求质量中心的运动方程。此外，利用 A 点的矩和考虑能量，便可得出 $\dot{\theta}^2$ 及 $\ddot{\theta}$ ，从而计算出 F 和 R 。 教师可要求学生利用沿 AB 及垂直于 AB 的力来列出运动方程。   *例二* 一长 2a 的均匀棒，沿一垂直平面滑下，棒的两端分别接触着一光滑水平面及一光滑垂直面，质量中心的坐标为 (x, y) 。 学生可利用质量中心的平移运动以及绕该中心的旋转运动来求 S 和 R 。 

内容	时间分配	教学建议
(c) 滚动及滑动		在刚体的一般运动中，「纯滚动」及「滑行和滚动」是两个比较重要的题目，以下是一些可与学生讨论的例子： *例一* 一半径为 a 的圆柱体，沿一粗糙斜面滚下。学生应不难得到下列方程： $I\ddot{\theta} = Fa$ 和 $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F$  接触点 A 的速度是 $\dot{x} - a\dot{\theta}$，在滑动的情况下，这速度不会是零的。 学生应知道在纯滚动的情况下，$\dot{x} = a\dot{\theta}$。 *例二*  一后角速度为 ω，速度为 u 圆柱体被放在一粗糙的水平面上。假设在时间 t 时，圆柱体旋转的角度为 θ，和移动的距离为 x，而接触点 A 的速度便是 $\dot{x} - a\dot{\theta}$。

内容	时间分配	教学建议
(d) 刚体的动能		教师可根据下列情况，研究圆柱体最终的运动： (1) u > aω (2) u = aω (3) u < aω 教师应强调学生不可假设磨擦力在没有滑动的情况下是最大的。 教师亦可讨论其它的例子，如实心球体在一固定球体上滚动的运动，实心圆柱体在空心圆柱体内移动的运动等。 教师应讨论一般的动能定理。物体的动能是由质量为 M 的质点在质量中心的线性动能和物体绕穿过质量中心的轴旋转动能所组成。 教师可讨论如下的例子：
		例  一圆柱体在没有滑动的情况下，沿一水平面以速率 u 滚动。学生应可写出圆柱体的动能数式，即 动能 = $\frac{1}{2}I\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}mu^2$
	34	